

Chapitre 1

Logique et rédaction

Plan du chapitre

1	Assertions et prédicats.	2
2	Opérateurs logiques.	2
2.1	La négation (opérateur “non”).	3
2.2	La conjonction (opérateur “et”).	3
2.3	La disjonction (opérateur “ou”).	4
2.4	L’implication (opérateur $\implies$).	4
2.5	Intermède : le “vrai” implicite.	5
2.6	L’équivalence (opérateur $\iff$).	6
2.7	Combinaison d’opérateurs.	6
2.8	Premiers résultats sur les opérateurs logiques.	7
3	Les quantificateurs.	8
3.1	Quantificateurs $\forall, \exists, \exists!$.	8
3.2	   Montrer : “ $\forall x \in E \quad P(x)$ ”.	9
3.3	   Montrer : “ $\exists x \in E \quad P(x)$ ”.	10
3.4	Plusieurs quantificateurs.	10
3.5	Quantificateurs et négation.	12
4	Prouver une équivalence ou une implication.	12
4.1	   Montrer une implication.	12
4.2	Preuve d’une implication par contraposée.	13
4.3	Preuve d’une équivalence par double implication.	13
4.4	   Montrer une équivalence.	14
5	Raisonnements classiques.	15
5.1	   Disjonction de cas.	15
5.2	   Raisonnement par récurrence.	15
5.3	Pour montrer le faux : passer par la négation.	17
5.4	   Raisonnement par l’absurde.	17
5.5	   Raisonnement par analyse-synthèse.	18
6	Vocabulaire lié aux implications et équivalences.	20
7	Méthodes pour les exercices.	22

Note : les sections commençant par “  ” présentent des règles de rédaction assorties d’exemples.

1 Assertions et prédicats

Définition 1.1 – Assertion, proposition

Une assertion (ou proposition) est un énoncé auquel on peut attribuer une et une seule valeur logique : soit Vrai (V), soit Faux (F).

On peut donner un nom à une assertion : on utilise en général les lettres P, Q, R .

Exemple 1. ○ $P : 3^2 = 9$ est une assertion vraie.

○ $Q : "5 \text{ est divisible par } 2"$ est une assertion fausse.

○ “77” et “ $\sqrt{!} = \times$ ” ne sont pas des assertions : ces énoncés ne sont ni vrai ni faux en soi.

Définition 1.2 – Prédicat

Un prédicat est une assertion dont la valeur logique dépend de la valeur d’une ou plusieurs variables (en général notées $x, y, z, \dots$).

On peut alors utiliser une notation similaire aux fonctions : si P est un prédicat qui dépend d’une variable x , on notera $P(x)$ l’assertion correspondante.

Exemple 2. On pose

$$P(x) : \sqrt{x} - 3 \geq 0$$

Alors $P(1)$ est fausse, $P(100)$ est vraie, et $P(-1)$ n’est pas une assertion (car $\sqrt{-1}$ n’a pas de sens).

Remarque. Un prédicat est donc en quelque sorte une “fonction logique” : à chaque valeur du ou des arguments, on associe la valeur logique Vraie ou Fausse. Comme une fonction, un prédicat peut avoir un “ensemble de définition”. Par exemple, le prédicat P ci-dessus n’est défini que pour $x \in \mathbb{R}_+$.

Exemple 3. Soit x, y deux réels. On pose l’assertion $Q(x, y) : x < y^2$

○ $Q(2, 3)$ est $Q(1, -1)$ est $Q(-1, 1)$ est

○ Si x est un réel négatif, $Q(x, x)$ est

○ Si x est un réel positif, $Q(x, x)$ est

2 Opérateurs logiques

Hypothèse

Dans le reste du chapitre, P, Q et R sont des assertions quelconques (ou éventuellement des prédicats).

Grâce à des opérateurs logiques (ou connecteurs logiques), on peut combiner des assertions pour en construire de nouvelles. On verra cinq opérateurs logiques : non et ou $\implies \iff$

2.1 La négation (opérateur “non”)

Définition 1.3 – Négation

On note “non P ” l’assertion dont la valeur de vérité est la suivante :

- Lorsque P est fausse (F), non P est vraie (V).
- Lorsque P est vraie (V), non P est fausse (F).

On peut résumer ces informations dans une table de vérité :

P	non P
F	V
V	F

Exemple 4. ◦ La proposition $P : 5 = 2$ est fausse. Sa négation est non $P : 5 \neq 2$ qui est donc vraie.
 ◦ Soit x un réel. La proposition $P(x) : x > 3$ a pour négation non $P(x) : x \leq 3$. Si $P(x)$ est vraie, alors non $P(x)$ est fausse et réciproquement.



La négation de “ $x > 3$ ” n’est pas “ $x < 3$ ”. En effet si x vaut 3, les deux assertions sont fausses en même temps : elles ne peuvent pas donc être la négation l’une de l’autre. Voici ce qu’il faut retenir :

négation	
$<$	$\geq$
$>$	$\leq$
$=$	$\neq$
$\in$	$\notin$

2.2 La conjonction (opérateur “et”)

Définition 1.4 – Opérateur “et”

On note “ P et Q ” l’assertion dont la valeur de vérité est la suivante :

- Si P et Q sont toutes les deux vraies, alors “ P et Q ” est vraie.
- Sinon, “ P et Q ” est fausse.

Par conséquent, la table de vérité de “ P et Q ” est donnée par :

P	Q	P et Q
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Exemple 5. ◦ L’assertion “ $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$ ” est vraie.
 ◦ Étant donné un réel x quelconque, l’assertion “ $x = 2$ et $x = 0$ ” est fausse.
 ◦ L’assertion “ P et non P ” est

2.3 La disjonction (opérateur “ou”)

Définition 1.5 – Opérateur “ou”

On note “ P ou Q ” l’assertion dont la valeur de vérité est la suivante :

- Si au moins une des deux assertions P et Q est vraie, alors “ P ou Q ” est vraie.
- Sinon, “ P ou Q ” est fausse.

Subséquent, la table de vérité de “ P ou Q ” est donnée par :

P	Q	P ou Q
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Remarque. Dans le langage courant, le mot “ou” a plusieurs sens :

- Le *ou exclusif* : dans la phrase “Je veux aller à la mer ou à la montagne”, il est clair qu’on ne peut pas aller aux deux endroits à la fois, c’est l’un ou l’autre. Cela revient à dire “Je veux aller *ou bien* à la mer, *ou bien* à la montagne”.
- Le *ou inclusif* : dans la phrase “Cette clinique accueille des personnes malades ou âgées”, il est clair que la clinique accueillera également une personne qui est en même temps âgée et malade. Pour lever l’ambiguïté, on peut remplacer “ou” par “et/ou”.

En mathématiques, l’opérateur logique “ou” est systématiquement un ou inclusif.

Exemple 6. ◦ L’assertion “ $3^3 = 9$ ou $\sqrt{2} < 1$ ” est fausse.

- Étant donné un réel x , l’assertion “ $x \geq 0$ ou $x \leq 0$ ” est vraie.
- L’assertion “ P ou non P ” est

2.4 L’implication (opérateur $\implies$)

Définition 1.6 – Implication

On note “ $P \implies Q$ ” (et on lit “ P implique Q ”) l’assertion dont la valeur de vérité est la suivante :

- Si P est vraie et Q est fausse, alors “ $P \implies Q$ ” est fausse.
- Sinon, “ $P \implies Q$ ” est vraie.

On peut synthétiser cela par une table de vérité :

P	Q	$P \implies Q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V



Le mot “implique” en français est parfois imprécis et peut mener à des confusions sur ce que l’assertion “ $P \implies Q$ ” veut dire. Voici ce qu’il faut retenir :

Dire que l’assertion “ $P \implies Q$ ” est vraie signifie **“Si P est vraie, alors Q est vraie”.**

Supposons que $P \implies Q$ est vraie. Vérifions que l’on a bien “Si P est vraie, alors Q est vraie”.



Si $P \implies Q$ est vraie et que P est fausse, on ne peut rien en déduire pour Q . Que l'assertion Q soit vraie ou fausse, il n'y a aucune contradiction via la table de vérité. On peut le synthétiser grossièrement :

Faux $\implies$...(n'importe quoi)... est vrai

Autre façon de le voir : lorsqu'on affirme "Si P est vraie, alors Q est vraie", et que P s'avère fausse, c'est comme si on n'avait rien affirmé. On aurait tout aussi bien pu ne rien dire, c'est un "vide logique". On considère alors que ne rien dire est vrai, et c'est pour ça qu'on considère que $P \implies Q$ est vraie si P est fausse. Il s'agit d'une convention¹.

Exemple 7. Soit x un réel. Les assertions suivantes sont vraies :

$$x > 2 \implies x \geq 2$$

$$x \leq 0 \implies 2x \leq x$$

Exemple 8. Soit x un réel. Les assertions suivantes sont *fausses* :

$$x \leq 0 \implies x < 0$$

$$x^2 = x \implies x = 0$$

Remarque. On peut écrire le symbole $\implies$ à l'envers : écrire $P \impliedby Q$ revient à écrire $Q \implies P$.

Exemple 9. Dans ce qui suit, remplacez les pointillés par $\implies$ ou $\impliedby$ pour que l'assertion soit vraie (x et y sont des réels) :

$$\begin{array}{ll} x^2 \geq 0 & \dots\dots x \geq 0 \\ x = y & \dots\dots x \neq y + 1 \\ x < y & \dots\dots e^x < e^y \end{array}$$

2.5 Intermède : le "vrai" implicite

Afin d'alléger le propos, on pourra ne plus écrire " P est vraie" mais simplement " P " : sans autre précision, on sous-entend dorénavant le "est vraie". Ainsi, au lieu de " n est pair est vrai" on pourra se contenter de " n est pair". En particulier, $P \implies Q$ peut se réécrire :

"Si on a P , alors on a Q " ou même "Si P , alors Q "

Cela correspond à ce qu'on dit oralement :

"Si $\underbrace{n \text{ est divisible par } 4}_P$, alors $\underbrace{n \text{ est pair}}_Q$ "

Attention toutefois : lorsqu'on écrit "Si P , alors Q ", cela ne signifie pas que P soit vraie, pas plus que Q soit vraie. Par contre, si P est vraie, alors Q l'est aussi.

1. Une convention est un choix arbitraire de la communauté mathématique. Par exemple, le fait que le chiffre 1 ne soit pas premier est aussi une convention. Le but d'une convention est souvent de simplifier les énoncés des théorèmes. Par exemple, si on supposait que 1 était un nombre premier, il faudrait rajouter des exceptions et des cas particuliers à la plupart des théorèmes sur les nombres premiers.

2.6 L'équivalence (opérateur $\iff$)

Définition 1.7

L'assertion " $P \iff Q$ " prend la valeur de vérité suivante :

- Si P et Q ont la même valeur de vérité (V ou F), alors " $P \iff Q$ " est vraie.
- Sinon, " $P \iff Q$ " est fausse.

L'assertion " $P \iff Q$ " se lit " P est équivalente à Q " ou encore " P si et seulement si Q ".

Par voie de fait, $P \iff Q$ est définie par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \iff Q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

On remarquera que $Q \iff P$ et $P \iff Q$ signifient la même chose. Pour aller plus vite, on dira souvent que P et Q sont équivalentes. **Dire que $P \iff Q$ (est vrai) revient donc à dire que si l'une des deux assertions est vraie, alors l'autre aussi** (ou encore que si l'une des deux assertions est fausse, alors l'autre aussi).

Exemple 10. Soit n un entier. Alors : $\underbrace{n \text{ est pair}}_P \iff \underbrace{n+1 \text{ est impair}}_Q$ (est vrai)

Remarque. On verra plus loin que $P \iff Q$ revient à dire que $P \implies Q$ et que $Q \implies P$.

2.7 Combinaison d'opérateurs

Les opérateurs non, et, ou, $\implies$, $\iff$ permettent, à partir d'assertions $P, Q, R, \dots$ de construire de nouvelles assertions. Par exemple, " P et Q " est encore une assertion. On peut utiliser plusieurs opérateurs d'affilée, mais pour lever toute ambiguïté il faut en général rajouter des parenthèses. Considérons les deux assertions :

$$(P \text{ et } Q) \implies R$$

$$P \text{ et } (Q \implies R)$$

Si P, Q, R sont toutes fausses, alors :

- la première assertion est car
- la seconde assertion est car

Ces deux assertions ne sont donc pas équivalentes puisque dans le cas particulier où P, Q, R sont fausses, elles n'ont pas la même valeur de vérité. D'où l'importance de ces parenthèses... Toutefois, il est fréquent de sous-entendre des parenthèses de chaque côté des équivalences, des implications ou juste après un "non". Par exemple, dans l'assertion " P et $Q \iff \text{non } R$ ou S ", il faut comprendre $(P \text{ et } Q) \iff (\text{non}(R) \text{ ou } S)$. Le Théorème 1.8 fournit d'autres exemples.

Exemple 11. Soit x un réel. $x^2 = 4 \implies (x = \dots \text{ ou } x = \dots)$

Remarque. Il est très fréquent en mathématique d’écrire des équivalences successives entre plusieurs assertions, par exemple :

$$P \iff Q \iff R \iff S \iff \dots$$

Il faut alors comprendre cela sous la forme :

$$(P \iff Q) \quad \text{et} \quad (Q \iff R) \quad \text{et} \quad (R \iff S) \quad \dots$$

Donc “ P est équivalente à Q ”, ainsi que “ Q est équivalente à R ”, ainsi que “ R est équivalente à S ”, etc. On peut aussi écrire des implications successives : écrire

$$P \implies Q \implies R \implies S \implies \dots$$

signifie que

$$(P \implies Q) \quad \text{et} \quad (Q \implies R) \quad \text{et} \quad (R \implies S) \quad \dots$$

Exemple 12. Pour tout entier n , on a :

$$\begin{aligned} n + 1 \text{ est impair} &\iff n \text{ est pair} \\ &\iff n \text{ est divisible par } 2 \\ &\iff \frac{n}{2} \text{ est entier} \end{aligned}$$

Ci-dessus, on a écrit une chaîne d’équivalences en superposant les symboles $\iff$ plutôt qu’en les écrivant tous sur une même ligne. C’est là encore très classique. On peut faire de même avec $\implies$, $=$, $\leq$, etc.

2.8 Premiers résultats sur les opérateurs logiques

La table de vérité est un outil mathématique pour montrer l’équivalence entre deux assertions.

Exemple 13. Montrer que “ $\text{non}(P \implies Q)$ ” est équivalent à “ P et non Q ”.

On écrit une colonne pour chaque lettre/assertion (P , Q , R , etc.) qui intervient dans l’équivalence (donc ici une pour P et une pour Q). Puis, on écrit autant de lignes que nécessaire pour traiter toutes les combinaisons possibles de valeurs (V ou F) pour ces lettres/assertions. Enfin, on construit colonne après colonne des assertions plus élaborées jusqu’à obtenir les deux assertions dont on souhaite montrer l’équivalence, et on remplit la table.

Les colonnes de “ $\text{non}(P \implies Q)$ ” et de “ P et non Q ” sont identiques pour tous les cas possibles : ces deux assertions prennent toujours les mêmes valeurs de vérité et sont donc bien équivalentes.



La table de vérité repose entièrement sur la logique “pure”. Ce n’est pas un outil très adapté pour montrer une équivalence dans un cas général. Cet outil ne servira que dans ce chapitre.

Théorème 1.8

Soit P, Q, R des assertions. Alors :

- | | |
|---|---|
| 1. $P \iff \text{non}(\text{non}P)$ | 4. $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$ |
| 2. $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff \text{non}P \text{ et } \text{non}Q$ | 5. $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \iff (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$ |
| 3. $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff \text{non}P \text{ ou } \text{non}Q$ | 6. $\boxed{\text{non}(P \implies Q) \iff P \text{ et } \text{non}Q}$ |

Démonstration. Pour chaque équivalence à démontrer, on fait une preuve avec une table de vérité, comme à l'Exemple 13. □

Exercice 1. Soit x un réel. On définit l'assertion

$$P : 8x^3 + 2x + 1 = 0 \implies x \neq 0$$

Écrire l'assertion $\text{non}P$. Est-ce que P est vraie ou fausse ?

3 Les quantificateurs

3.1 Quantificateurs $\forall, \exists, \exists!$

Définition 1.9 – Quantificateurs logiques

Soit E un ensemble et P un prédicat qui dépend d'une variable x dans E .

- L'assertion

$$\forall x \in E \quad P(x)$$

est vraie lorsque **pour tous** les éléments x dans E , l'assertion $P(x)$ est vraie.

- L'assertion

$$\exists x \in E \quad P(x)$$

est vraie lorsqu'**il existe au moins un** élément x dans E pour lequel $P(x)$ est vraie.

- L'assertion

$$\exists! x \in E \quad P(x)$$

est vraie lorsqu'**il existe un unique** élément x dans E pour lequel $P(x)$ est vraie.

Remarque. Les symboles $\forall, \exists$ et $\exists!$ sont appelés des quantificateurs.

- À l'oral, " $\forall x \in E$ " se dit oralement "pour tout $x \in E$ " ou "quel que soit $x \in E$ ".
- À l'oral, " $\exists x \in E$ " se dit oralement "il existe $x \in E$ (tel que)".

- À l'oral, " $\exists!x \in E$ " se dit oralement "il existe un unique $x \in E$ (tel que)".

Les quantificateurs sont **essentiels** : ils font partie du langage des mathématiques au même titre que π ou $\mathbb{R}$.

Exemple 14. 1. " $\forall n \in \mathbb{Z} \quad n$ est pair" est faux.

2. " $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq x$ " est

3. " $\exists y \in \mathbb{R}_+ \quad y \leq 0$ " est vraie.

4. " $\exists m \in \mathbb{N} \quad m^2 = 3$ " est

5. " $\exists!x \in \mathbb{R} \quad x = \pi$ " est vraie.

6. " $\exists!x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 1$ " est

Théorème 1.10

Soit n un entier.

3.2 Montrer : " $\forall x \in E \quad P(x)$ "

Les quantificateurs ont un sens mathématique précis, et la transcription en langage "naturel" est très codifiée pour éviter les contresens.

Méthode – Rédaction avec un " $\forall$ "

Pour montrer une assertion du type $\forall x \in E \quad P(x)$, on écrit SYSTÉMATIQUEMENT :

Soit $x \in E$.	$\left. \vphantom{\begin{array}{c} \text{Soit } x \in E. \\ \text{Montrons que } P(x). \\ \vdots \\ \vdots \end{array}} \right\}$ On introduit la variable x
Montrons que $P(x)$.	$\left. \vphantom{\begin{array}{c} \text{Soit } x \in E. \\ \text{Montrons que } P(x). \\ \vdots \\ \vdots \end{array}} \right\}$ Facultatif
$\vdots$	$\left. \vphantom{\begin{array}{c} \text{Soit } x \in E. \\ \text{Montrons que } P(x). \\ \vdots \\ \vdots \end{array}} \right\}$ Preuve de $P(x)$
$\vdots$	

Alternative : si la preuve de $P(x)$ est rapide, on peut écrire "**Pour tout** $x \in E$, ..." puis faire la preuve de $P(x)$ dans la même phrase.

Une fois qu'on a écrit "Soit $x \in E$ ", il faut considérer que x représente un certain élément de E , que l'on ne connaît pas. La valeur de x est fixée pour la suite de la preuve, mais nous est inconnue. Il faut prouver $P(x)$ quelle que soit la véritable valeur de x .

Exemple. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4x - 4x^2 \leq 1$

3.3 **Montrer : “ $\exists x \in E \quad P(x)$ ”**

Pour montrer qu’il existe (au moins) un élément d’un ensemble qui vérifie une propriété, il faut d’abord trouver un tel élément puis on le stocke dans une constante avec “On pose”.

Méthode – Rédaction avec un “ $\exists$ ”

Pour montrer une assertion du type $\exists x \in E \quad P(x)$, une fois qu’on a trouvé un objet x qui convient, on écrit SYSTÉMATIQUEMENT :

On pose $x = (\dots) \in E$.	}	On exhibe l’objet x qu’on a trouvé
		et on vérifie qu’il appartient bien à E
Vérifions que $P(x)$.	}	Facultatif en général
$\vdots$	}	Preuve de $P(x)$
$\vdots$		

Contrairement à la section précédente, vérifier $P(x)$ est assez simple. La difficulté principale se situe au début, lorsqu’on doit trouver un objet x qui convient. Il faut le plus souvent entreprendre une phase de recherche au brouillon pour trouver un bon x , et hélas il n’y a pas de méthode infallible.

Exemple 15. Montrer que : $\exists N \in \mathbb{N} \quad N, N+2, N+6$ et $N+8$ sont tous premiers

3.4 Plusieurs quantificateurs

On peut enchaîner plusieurs quantificateurs (liés à des variables différentes) : l’assertion

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

signifie qu'il existe deux réels x et y qui vérifient le système ci-dessus. Cette assertion est vraie : $x = \frac{3}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}$ conviennent. De même,

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R}_- \quad n^2 - x \geq 0$$

est une assertion qui se lit naturellement : elle affirme que, quels que soient l'entier n et le réel négatif x qu'on se donne, on a $n^2 - x \geq 0$. Cette assertion est vraie, car $n^2 \geq 0$ et $-x \geq 0$.

Ordre (quantificateurs identiques)

Lorsqu'il y a deux quantificateurs *identiques consécutifs* (deux $\forall$ ou deux $\exists$), on peut les échanger sans modifier le sens de l'assertion. Ainsi, toutes ces écritures sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad P(x, y) \\ \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P(x, y) \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad P(x, y) \\ \forall x, y \in \mathbb{R} \quad P(x, y) \end{aligned}$$

et de même lorsque tous les “ $\forall$ ” sont remplacés par des “ $\exists$ ”. La dernière écriture est particulière et peu courante en CPGE. Elle permet d'aller plus vite lorsque les deux variables appartiennent au même ensemble (ici $\mathbb{R}$).

Ordre (quantificateurs différents)

Exemple 16. On considère les deux assertions suivantes :

$$\begin{aligned} P : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln y = x \\ Q : \quad \exists y \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \ln y = x \end{aligned}$$

L'ordre dans lequel les quantificateurs apparaissent change le sens :

1. Dans P , le quantificateur $\exists y$ se trouve **après** $\forall x$: cela signifie que la variable y **peut dépendre de** x . On peut le poser comme une fonction de x , par exemple $y = 2x$, ou $y = \cos(x)$, etc.
2. Dans Q , le quantificateur $\exists y$ se trouve **avant** $\forall x$: cela signifie que la variable y **doit être choisie indépendamment de** x .

Exemple 17. Montrer l'assertion P ci-dessus. On verra plus loin que par contre Q est fausse.



Avec un quantificateur $\exists z(\dots)$, la variable z peut dépendre de toutes les variables situées *avant* le quantificateur $\exists z(\dots)$, mais est indépendante des autres variables situées *après* ce même quantificateur. La règle est identique avec $\exists! z(\dots)$

Considérons une assertion R de la forme :

$$R : \quad \exists x \in \dots \quad \forall y \in \dots \quad \exists! z \in \dots \quad \forall t \in \dots \quad P(x, y, z, t)$$

- La variable x ne peut pas dépendre de y, z, t .
- (L'unique) valeur de z peut dépendre de x et y , mais pas de t .
- Pour y et t , le quantificateur est “ $\forall$ ” donc la proposition doit être vérifiée quelle que soit la valeur permise. Il n'y a donc pas lieu de dire que y ou t dépendent d'autres variables.

Dans l'assertion R ci-dessus, on ne peut donc pas modifier l'ordre des quantificateurs.

3.5 Quantificateurs et négation

Théorème 1.11

- La négation de $\forall x \in E \quad P(x)$ est $\exists x \in E \quad \text{non } P(x)$.
- La négation de $\exists x \in E \quad P(x)$ est $\forall x \in E \quad \text{non } P(x)$.

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ sont donc échangés en passant à la négation. Il ne faut pas oublier de transformer $P(x)$ en $\text{non } P(x)$! La négation du quantificateur $\exists$! est plus délicate, un exercice en TD traitera la question.

	L'assertion ...	est (V/F)...	et a pour négation...	qui est donc (V/F)...
Exemple 18.	$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 0$	V	$\exists n \in \mathbb{N} \quad n < 0$	F
	$\exists y \in \mathbb{R} \quad y \neq \pi$			
	$\exists a \in [0, 1] \quad a < a^2$			

Négation avec plusieurs quantificateurs

On reprend l'assertion Q de l'Exemple 16 : $Q : \exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \ln y = x$

Pour montrer que Q est fausse, on va en fait en montrer que $\text{non } Q$ est vraie. Pour passer à la négation dans Q , bien qu'il y ait plusieurs quantificateurs, le principe est le même : on inverse chaque quantificateur puis on passe à la négation dans l'assertion finale. Ainsi :

$\text{non } Q :$

Exemple 19. Montrer que $\text{non } Q$ est vraie.

4 Prouver une équivalence ou une implication

4.1 Montrer une implication

Méthode – Rédiger une preuve d'implication

Pour montrer une assertion du type " $P \implies Q$ ", on écrit :

On suppose P .	}	Dans la suite, P est supposée vraie
Montrons Q .		
$\vdots$	}	Facultatif en général
$\vdots$		
$\vdots$	}	Preuve que Q est vraie
$\vdots$		

On peut parfois être plus concis, avec des implications successives (qui doivent toutes être justifiées !) :

$$\begin{aligned}
 P &\implies \dots \\
 &\implies \dots \\
 &\implies Q
 \end{aligned}$$

Exemple 20. Cf sections suivantes.

4.2 Preuve d'une implication par contraposée

Théorème 1.12 – Contraposée

Soit P et Q deux assertions.

L'assertion $P \implies Q$ est équivalente à $\text{non } Q \implies \text{non } P$

L'assertion $\text{non } Q \implies \text{non } P$ est appelée la contraposée de l'assertion $P \implies Q$.

Passer par la contraposée permet parfois de montrer plus facilement une implication. Cela arrive notamment si l'assertion P est compliquée à exploiter, tandis que $\text{non } Q$ constitue un point de départ plus simple. Il faut être précis dans la rédaction : il est recommandé d'écrire clairement l'assertion $\text{non } Q \implies \text{non } P$ que vous voulez montrer.

Exemple 21. Montrer que : $\forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m^2 + n^2 \geq 9 \implies m \geq 3 \text{ ou } n \geq 3)$



La contraposée n'a de sens que pour une assertion qui est **exactement** de la forme $P \implies Q$. Ci-dessous on note $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois assertions :

Assertion	Forme $P \implies Q$?	avec P :	avec Q :
$\forall x \in E \quad \mathcal{P}(x) \implies \mathcal{Q}(x)$	Non	Pas de contraposée possible	
$(\exists x \in E \quad \mathcal{P}(x)) \implies (\forall y \in E \quad \mathcal{Q}(y))$	Oui	$\exists x \in E \quad \mathcal{P}(x)$	$\forall y \in E \quad \mathcal{Q}(y)$
$(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \implies \mathcal{R}$	Oui	$\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}$	$\mathcal{R}$

4.3 Preuve d'une équivalence par double implication

Théorème 1.13 – Double implication

Soit P, Q deux assertions.

$P \iff Q$ est équivalente à $(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)$

Démonstration. Avec une table de vérité, comme pour le Théorème 1.8. □

Ainsi, pour montrer une équivalence, on peut montrer les deux implications $\implies$ et $\impliedby$ à la place. L'implication dans le sens $\implies$ est appelée sens direct et celle dans le sens $\impliedby$ est appelée sens réciproque.

Exemple 22. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n est pair $\iff n^2$ est pair.

4.4 Montrer une équivalence

Méthode – Rédiger une preuve d'équivalence

Pour montrer une assertion du type “ $P \iff Q$ ”, on raisonne le plus souvent par double implication : il faut alors bien séparer la preuve en deux morceaux :

On raisonne par **double implication**.

- Supposons P . Montrons Q . (ou bien montrons le sens direct)
- $\vdots$
- Supposons Q . Montrons P . (ou bien montrons le sens réciproque)
- $\vdots$

Finalement, on a bien $P \iff Q$

On peut parfois être plus concis, avec des équivalences successives (qui doivent toutes être justifiées !) :

$$\begin{aligned} P &\iff \dots \\ &\iff \dots \\ &\iff Q \end{aligned}$$

5 Raisonnements classiques

5.1 Disjonction de cas

Méthode – Rédiger une disjonction de cas

On souhaite montrer une assertion de la forme $\forall x \in E \quad P(x)$. On peut traiter différents cas particuliers pour x en écrivant :

- Si $x \dots$ } Premier cas
- $\vdots$ } Preuve de $P(x)$
- Si $x \dots$ } Deuxième cas
- $\vdots$ } Preuve de $P(x)$
- etc. } Troisième cas

Pour que cela fonctionne, il est essentiel que tout élément x de E corresponde à au moins un de ces cas particuliers !

La disjonction de cas permet de découper le problème en se donnant des hypothèses supplémentaires sur x . C'est particulièrement efficace lorsque $E = \mathbb{N}$, et qu'on distingue les cas “ x est pair” et “ x est impair”.

Exemple 23. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + n$ est pair.

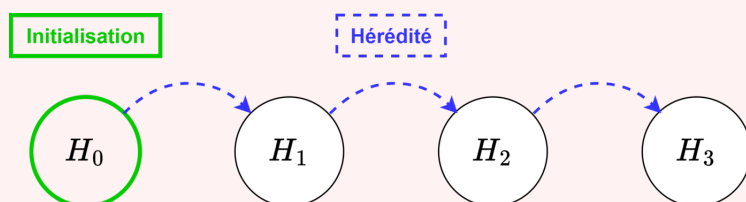
5.2 Raisonnement par récurrence

Une récurrence sert à montrer une assertion de la forme $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$. Dans cette section, l'assertion $P(n)$ sera notée H_n . Le but est donc de montrer que H_n est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Il existe plusieurs types de récurrence, mais toutes sont basées sur le même triptyque : initialisation et hérédité (avec une hypothèse de récurrence) pour en déduire la conclusion.

Théorème 1.14 – Récurrence simple

Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des assertions.

1. Si H_0 est vraie
 2. et si $\forall n \in \mathbb{N} \quad H_n \implies H_{n+1}$
- ... alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie.



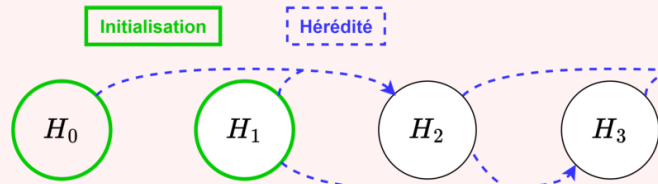
Théorème 1.15 – Récurrence double

Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des assertions.

1. Si H_0 et H_1 sont vraies

2. et si $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} H_n \\ H_{n+1} \end{cases} \implies H_{n+2}$

... alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie.



Théorème 1.16 – Récurrence forte

Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des assertions.

1. Si H_0 est vraie

2. et si $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{cases} \implies H_{n+1}$

... alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie.

Remarque (Commencer à un indice donné). Il arrive qu'on veuille montrer H_n seulement pour des indices $n \geq 1$. Dans ce cas, cela décale tous les indices. Par exemple pour une récurrence double, l'initialisation consistera à montrer H_1 et H_2 , puis pour l'hérédité, on commencera à partir d'un entier $n \geq 1$. Idem si on veut montrer H_n seulement pour des indices $n \geq 2$, ou $n \geq 3$, etc.

Exemple 24. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Exemple 25. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* & u_{n+1} = 1 + u_1 + \dots + u_n \end{cases}$$
 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 2^{n-1}$.

5.3 Pour montrer le faux : passer par la négation

En mathématiques, on voit surtout des raisonnements pour montrer qu'une assertion est vraie. Ainsi, pour montrer qu'une assertion P est fausse, il est souvent plus indiqué de passer à la négation et de montrer que non P est vraie.

Exemple 26. L'assertion $\forall x \in \mathbb{R} \quad x(1-x) \leq 0$ est-elle vraie ?

Remarque. En particulier, pour montrer qu'une assertion de la forme $\forall x \in E \quad P(x)$ est *fausse*, on peut montrer à la place : $\exists x \in E \quad \text{non } P(x)$. Ainsi, il suffit de trouver un élément x de E pour lequel $P(x)$ est fausse. Un seul suffit ! Un tel x est appelé un contre-exemple (c'est ce qu'on a fait ci-dessus).

5.4 Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde revient à supposer qu'une assertion est Vraie et en déduire une assertion manifestement Fausse (par exemple $0 = 1$...) : on aurait alors prouvé une implication du type Vrai $\implies$ Faux, or, le Vrai ne peut pas impliquer le Faux. Il s'agit donc d'une contradiction. Cela signifie donc que l'assertion de départ qu'on avait supposée Vraie était en fait Fausse.

Méthode

Le raisonnement par l'absurde peut servir de deux façons :

- Ou bien pour montrer qu'une proposition est *fausse* : on **suppose par l'absurde** qu'elle est *vraie*, et on en déduit une **contradiction**.
- Ou bien pour montrer qu'une proposition est *vraie* : on **suppose par l'absurde** que *sa négation est vraie*, et on en déduit une **contradiction**.

Il est essentiel d'indiquer clairement qu'on raisonne par l'absurde, sinon un raisonnement peut vite devenir confus !

Méthode – Rédaction d'un raisonnement par l'absurde

Pour montrer que P est vraie en raisonnant par l'absurde, on écrit :

Supposons par l'absurde que ... (est vraie)

⋮

} Obtention
d'une contradiction.

Contradiction. Donc ... est vraie / fausse.

Remarque. Le raisonnement par l'absurde est particulièrement efficace quand on veut montrer qu'un objet *ne vérifie pas* une propriété, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 27. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel (i.e. ne peut pas s'écrire $\frac{a}{b}$ avec a et b deux entiers).

5.5 Raisonnement par analyse-synthèse

On considère une assertion $P(u)$ qui dépend d'une variable $u \in E$. Le raisonnement par analyse synthèse permet de déterminer TOUTES les valeurs de u dans E pour lesquelles $P(u)$ est vraie. Ce raisonnement se décompose en deux parties :

1. Analyse : on considère un élément $u \in E$ dont on suppose qu'il vérifie $P(u)$. Du fait que $P(u)$ est vrai, on en déduit des conditions qui permettent de **limiter les valeurs possibles** pour u . Le plus souvent, on peut pousser l'analyse jusqu'à ce qu'il reste très peu de valeurs (par exemple quatre).
2. Synthèse : on vérifie, pour chaque valeur de u trouvée en analyse, lesquelles sont bien dans E et vérifient effectivement $P(u)$. L'analyse livre une liste de valeurs "candidates" et la synthèse permet de **vérifier quelles valeurs sont effectivement solutions**.

Méthode – Rédiger un raisonnement par analyse-synthèse

Pour trouver les éléments u dans E qui vérifient $P(u)$, on écrit :

On raisonne par analyse-synthèse.

- **Analyse** : soit $u \in E$ qui vérifie $P(u)$.

$\vdots$

On trouve $u = \dots$ ou $u = \dots$ ou $\dots$

} Obtention de conditions sur u .

- **Synthèse** :

Pour $u = \dots$ [on vérifie si $u \in E$ et si $P(u)$]

Pour $u = \dots$ [on vérifie si $u \in E$ et si $P(u)$]

$\vdots$

} Pour chaque valeur trouvée en analyse, on vérifie si ça marche.

Conclusion : $\mathcal{S} = \dots$

} On donne les solutions.

Un cas typique d'application est pour trouver toutes les fonctions qui vérifient une équation fonctionnelle, comme sur l'exemple ci-dessous :

Exemple 28. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x - y) = x - f(y)$$

Démonstration. Vu en TD. À noter qu'ici le rôle de u est joué par la fonction f , et que E est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $\square$

Remarque. Le raisonnement par analyse-synthèse permet en particulier :

- De montrer qu'il existe une et une seule valeur u de E qui vérifie $P(u)$.
- De montrer qu'un objet mathématique admet une unique décomposition selon une certaine forme. Dans ce cas, le rôle de u est joué typiquement par un couple (a, b) de variables.

Exemple 29. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer qu'il existe une unique fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paire et une unique fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impaire telle que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = g(x) + h(x)$.

6 Vocabulaire lié aux implications et équivalences

Les mathématiciens disposent de plusieurs façons de signifier l'implication et l'équivalence d'assertions. Dans chacun des cadres ci-dessous, les différentes lignes sont toutes synonymes :

Q est une <u>condition nécessaire</u> (CN) de P .	Q est une <u>condition suffisante</u> (CS) de P .	Q est une <u>condition nécessaire et</u> <u>suffisante (CNS)</u> pour P .
$P \implies Q$	$Q \implies P$	$P \iff Q$
Pour avoir P , il faut (nécessairement) avoir Q .	Pour avoir P , il est <i>suffisant</i> d'avoir Q .	Pour avoir P , il est <i>nécessaire</i> et <i>suffisant</i> d'avoir Q .
On a P seulement si (on a) Q .	On a P si (on a) Q .	On a P si et seulement si (on a) Q .

Attention, si $P \implies Q$, alors P est une CS de Q , et Q est une CN de P . On peut se donner le moyen mnémotechnique suivant :

"Suffisant $\implies$ Nécessaire"

7 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer une **implication** $P \Rightarrow Q$, on peut :

- Raisonner de manière directe, en écrivant “On suppose P ”, puis en déduire Q .
- Raisonner par implications successives : $P \Rightarrow \dots \Rightarrow Q$.
- Raisonner par contraposée.

Méthode

Pour montrer une **équivalence** $P \Leftrightarrow Q$, on peut :

- Raisonner par double implication.
- Raisonner par équivalences successives : $P \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q$.

Méthode

Pour montrer qu’une assertion est **fausse**, on peut :

- Supposer par l’absurde que l’assertion est vraie, et en déduire une contradiction.
- Montrer que sa négation est vraie.

Méthode

Pour montrer **l’existence et l’unicité** d’un objet ou d’une décomposition, on peut :

- Montrer l’unicité (cf chapitre 0), puis l’existence.
- Raisonner par analyse-synthèse.

Pour savoir **quel raisonnement appliquer**, voici quelques astuces :

- Pour montrer qu’un objet *ne vérifie pas une propriété* : raisonner par l’absurde en supposant que c’est le cas.
- Pour trouver tous les éléments qui vérifient une propriété : raisonner par analyse-synthèse.
- Pour montrer une propriété dépendant d’un entier n : parfois une preuve directe suffit, parfois la récurrence est indispensable, notamment si vous disposez d’une relation de récurrence (qui d’ailleurs peut vous aiguiller sur le bon type de récurrence entre simple, double, forte).